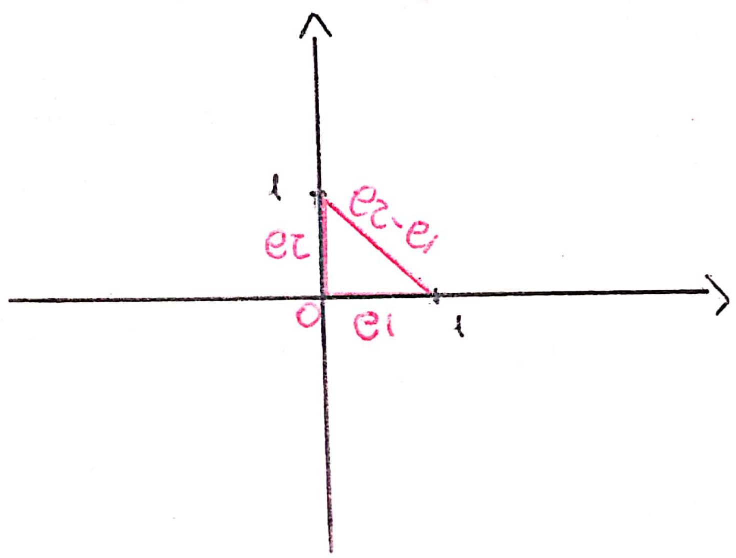
3.5)



Como quiero q' sea equilatero:

$\|e_1\| = \|e_2\| = \|e_2 - e_1\|$

→ Podemos pedir que:

$\|e_1\|^2 = \|e_2\|^2 = \|e_2 - e_1\|^2$

$\rightarrow (e_1, e_1) = (e_2, e_2) = (e_2, e_2) - (e_2, e_1) - (e_1, e_2) + (e_1, e_1)$

$\rightarrow (e_2, e_2) - (e_2, e_1) - (e_1, e_2) = 0$ (I)

$\rightarrow -(e_2, e_1) - (e_1, e_2) + (e_1, e_1) = 0$ (II)

$\rightarrow (e_1, e_1) = (e_2, e_2)$ (III)

(II) $\rightarrow -2(e_1, e_2) + (e_1, e_1) = 0 \rightarrow (e_1, e_1) = 2(e_1, e_2)$

$$\rightarrow \boxed{(e_1, e_2) = \frac{1}{2}(e_1, e_1) \quad y \quad (e_2, e_2) = (e_1, e_1)}$$

$$\rightarrow (x, y) = [x_1 \;\; x_2] \begin{bmatrix} (e_1, e_1) & \frac{1}{2}(e_1, e_1) \\ \frac{1}{2}(e_1, e_1) & (e_1, e_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad (e_1, e_1) > 0$$

Siempre teniendo en cuenta que trabajo con reales.

Así se pueden expresar todos los PI en $\mathbb{R}^2$ que ~~cumplen~~ convierten al triángulo de vért. $0, e_1$ y e_2 en equilátero.

El ángulo entre v_1 y v_2 lo calculo:

$$\cos\theta = \frac{(v_1, v_2)}{\|v_1\| \, \|v_2\|} \quad , \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

Voy a usar el PI resultante de lo calculado anteriormente con $(e_1, e_1) = 1$; por lo que queda:

$$(x, y) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$(v_1, v_2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = \boxed{0}$$

Por lo que:

$$\theta = \cos^{-1}(0), \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

$\to \boxed{\theta = \pi/2} \to$ ANGULO ENTRE V1 Y V2., son ortogonales.

Como en el triángulo formado por $\bar{0}$, v_1 y v_2, sabemos que v_1 y v_2 son ortogonales, el triángulo es rectángulo y puedo tomar base $= \|v_1\|$ y altura $= \|v_2\|$ y aplicar la fórmula para hallar el área:

$$A = \frac{\|v_1\| . \|v_2\|}{2}$$

Busco $\|v_1\|$ sabiendo que $\boxed{\|v_1\|^2 = (v_1, v_1)}$ (uso mismo PI que antes con $(e_1, e_1) = 1$)

$$\to (v_1, v_1) = [1, 1] . \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = \boxed{3} \to \boxed{\text{Base} = \sqrt{3}}$$

Lo mismo para hallar $\|v_2\|$:

$$\to (v_2, v_2) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \boxed{1} \to \boxed{\text{Altura} = \sqrt{1} = 1}$$

Por lo tanto: $A = \dfrac{\overbrace{\|v_1\|}^{\text{base}} . \overbrace{\|v_2\|}^{\text{Altura}}}{2} = \dfrac{\sqrt{3} . 1}{2} = \boxed{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$ AREA

Si el PI elegido fuera otro, cambiaría el ángulo entre v_1 y v_2, por lo que ya el área no me quedaría igual y habría que utilizar pitágoras para saber cuál es la base y la altura.